Exercice 1

1

$$(S') : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$$

(S') sphère de centre $\Omega(0,0,1)$ et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$

2) a

$$\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

2) b

$$d(\Omega,(AB)) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = 2$$

on a $d(\Omega,(AB)) = R$

donc la droite (AB) est tangente à (S').

2) c

$\vec{\Omega A}(2,0,0)$ donc $\Omega A = \sqrt{(2)^2+(0)^2+(0)^2} = 2$

on a $\Omega A = R \Rightarrow A \in (S)$

$\begin{cases} A \in (S) \\ A \in (AB) \end{cases} \Rightarrow$ A point de la tangente de (S) et (AB)

Exercice 2

1

$$z^2 - (4+2\sqrt{2})z + 8 + 4\sqrt{2} = 0$$

$$\Delta = \left(-(4+2\sqrt{2})\right)^2 - 4(1)(8+4\sqrt{2})$$

$$= 16 + 16\sqrt{2} + 8 - 32 - 16\sqrt{2} = -8$$

$$z_1 = \frac{4+2\sqrt{2}+\sqrt{8}\,i}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i}{2} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$$

$$S = \{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i \,,\, 2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\}$$

2) a

$$e^{-\frac{\pi}{4}i}a = \left(\cos\frac{-\pi}{4} + \sin\frac{-\pi}{4}\, i\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\, i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\, i\right)$$

$$= \sqrt{2} + 1 + i - \sqrt{2} i - i + 1$$

$$= 2+\sqrt{2} - \sqrt{2} i = \bar{a}$$

2) b

$$a = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow |a| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{8+4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} = e^{-\frac{\pi}{4}i}\cdot a \Rightarrow \arg \bar{a} \equiv \arg\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\cdot a\right) \ [2\pi]$$

$$\Rightarrow -\arg a \equiv \arg\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) + \arg(a) \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow -\arg a \equiv \frac{-\pi}{4} + \arg(a) \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad -2\arg a \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \arg a \equiv \frac{\pi}{8} \quad [2\pi]$$

2) c

on a : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\arg a \equiv \frac{\pi}{8} \; [2\pi]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\, i\right)} \quad (*_1)$$

or a

$$\boxed{a = 2+\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i} \quad (*_2)$$

d'après $(*_1)$ et $(*_2)$
$$\begin{cases} 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = 2+\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \end{cases}$$

donc $\cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

2) d

$$R(O,\alpha)(A) = B \iff \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff b = e^{\alpha i} \cdot a$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\alpha i} = \frac{b}{a}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\alpha i} = \frac{\bar{a}}{a}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\alpha i} = e^{-\frac{\pi}{4} i}$$

soit $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 3

$$\{1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0\}$$

1

$|1|?|?|$

$$P(A) = \frac{A_4^1 \cdot A_6^2}{A_7^3} = \frac{4 \times 30}{210} = \frac{4}{7}$$

2

$|0|\bar{0}|\bar{0}|$

$|\bar{0}|\bar{0}|\bar{0}|$

$$P(B) = \frac{A_3^1 \cdot A_4^2 \times 3 + A_4^3}{A_7^3}$$

$$= \frac{3 \cdot 12 \cdot 3 + 24}{210} = \frac{22}{35}$$

$$\boxed{1}\,\boxed{\bar{0}}\,\boxed{\bar{0}}$$
$$\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{\bar{0}}$$

$$P(A\cap B) = \frac{A_4^1 \cdot A_3^2 + A_4^1 \cdot (A_3^1 \cdot A_3^1 \cdot 2)}{A_7^3}$$

$$= \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{210} = \frac{16}{35}$$

on a
$$\begin{cases} P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{22}{35} = \frac{88}{245} \\ P(A\cap B) = \frac{16}{35} \end{cases}$$

$P(A) \cdot P(B) \neq P(A\cap B) \implies$ A et B ne sont pas independantes.

3

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{16/35}{\frac{4}{7}} = \frac{4}{5}$$

Problème

1

$x \in D_f \iff \frac{x+2}{2x} > 0$ et $2x \neq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{2x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$$\boxed{D_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[}$$

2) a

$$f(-2-x) + f(x) = (-2-x) + \ln\left(\frac{-2-x+2}{2(-2-x)}\right) + x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right)$$

$$= -2 - \cancel{x} + \ln\left(\frac{x}{2(2+x)}\right) + \cancel{x} + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right)$$

$$= -2 + \ln\left(\frac{\cancel{x}}{2(\cancel{2+x})} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{2\cancel{x}}\right)$$

$$= -2 + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -2 - \ln(4)$$

2) b

$\forall\ x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ $\quad 2a - x = -2 - x \in D_f$

$$f(2a - x) = f(2(-1) - x)$$
$$= f(-2 - x)$$
$$= -2 - \ln(4) - f(x)$$

D'après (a)

$$= -2 - 2\ln(2) - f(x)$$
$$= 2(-1 - \ln(2)) - f(x)$$
$$= 2b - f(x)$$

$\Rightarrow$ $I(-1 ; -1 - \ln(2))$ est centre symétrie de (C_f)

3

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{0^+} \frac{x+2}{2x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right) = \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$$

La droite d'équation $x = 0$ asymptote verticale à (C_f)

4) a

on a : $$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right)$$

$$= x + \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x}\right)$$

$$= x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$= x - \ln(2) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

4) b

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} - \ln(2) + \underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)}_{\to 0} = +\infty$$

car $\left(\lim_{+\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0\right)$

$$\lim_{+\infty} f(x) - y = \lim_{+\infty} x - \ln(2) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x + \ln(2)$$

$$= \lim_{+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{+\infty} \ln(1) = 0$$

donc $(\Delta) : y = x - \ln(2)$ asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

on a $f(x) - y = x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right) - x = \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right)$

$$f(x) - y \geqslant 0 \iff \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right) \geqslant 0$$

$$\iff \frac{x+2}{2x} \geqslant 1$$

$$\iff \frac{x+2}{2x} - 1 \geqslant 0$$

$$\iff \frac{2-x}{2x} \geqslant 0$$

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	//////	$+$ 0	$-$
$2x$	$-$	//////	$+$	$+$
$\frac{2-x}{2x}$	$-$	//////	$+$ 0	$-$

$$f(x) - y \geqslant 0 \iff x \in \,]0, 2]$$

$$f(x) - y \leqslant 0 \iff x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,[2, +\infty[$$

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	//////	$+$ 0	$-$
position relative	$(\mathscr{C})$ au dessous de (D)	//////	$(\mathscr{C})$ au dessus de (D)	$(\mathscr{C})$ au dessous de (D)

6) a

$$f'(x) = \left(x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right)\right)'$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{x+2}{2x}\right)'}{\frac{x+2}{2x}}$$

$$= 1 + \left(\frac{(x+2)'(2x)-(x+2)(2x)'}{(2x)^2}\right) \cdot \frac{2x}{x+2}$$

$$= 1 + \left(\frac{-4}{4x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{x+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{x^2+2x-2}{x(x+2)}$$

6) b

$f'(x)$ est du signe de x^2+2x-2 car $x(x+2)>0$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-2) = 12$$

$$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3}$$

x	0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2+2x-2	||	$-$	0	$+$	

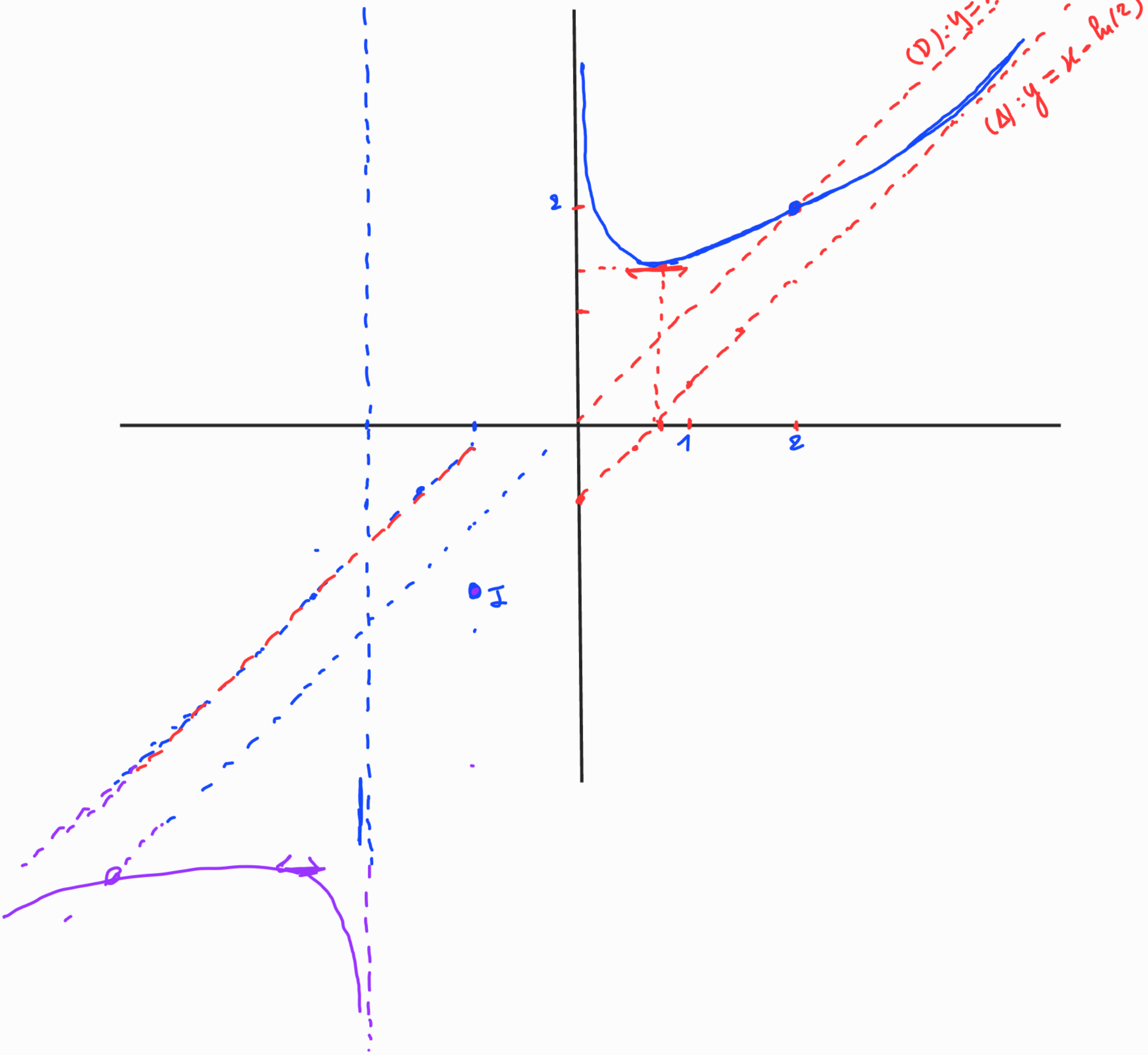
* si $x \in [-1+\sqrt{3}, +\infty[$: $f'(x) \geqslant 0$

donc f est croissante sur $[-1+\sqrt{3}, +\infty[$

* si $x \in]0, -1+\sqrt{3}]$: $f'(x) \leqslant 0$

donc f est décroissante sur $]0, -1+\sqrt{3}]$

x	$-\infty$	-2		0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		||		||	$-$	0	$+$	
f		||		|| $+\infty$	$\searrow$	$f(-1+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$



8) a

$$H'(x) = \left(x\ln(x) - x\right)' = (x)'\left(\ln(x)\right) + (x)\left(\ln(x)\right)' - 1$$

$$= (1)\left(\ln(x)\right) + (x)\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x) = h(x)$$

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x) - x\right]_1^2$$

$$= \left(2\ln(2) - 2\right) - (-1) = 2\ln(2) - 1$$

8) b

on a $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$

$$\int_1^2 \frac{x}{x+2}\,dx = \int_1^2 1 - \frac{2}{x+2}\,dx$$

$$= \left[x - 2\ln|x+2|\right]_1^2$$

$$= (2 - 2\ln(4)) - (1 - 2\ln(3))$$

$$= 2 - 4\ln(2) - 1 + 2\ln(3)$$

$$= 1 - 4\ln(2) + 2\ln(3)$$

8) c

$u(x) = \ln(x+2) \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x+2}$

$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$

$$\int_1^2 \ln(x+2)\,dx = \left[x \cdot \ln(x+2)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2}\right)\cdot(x)\,dx$$

$$= 2\ln(4) - \ln(3) - \int_1^2 \frac{x}{x+2}\,dx$$

$$= 4\ln(2) - \ln(3) - (1 - 4\ln(2) + 2\ln(3))$$

$$= 4\ln(2) - \ln(3) - 1 + 4\ln(2) - 2\ln(3)$$

$$= 8\ln(2) - 3\ln(3) - 1$$

$$\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\, dx \qquad \|\vec{i}\| . \|\vec{j}\|$$

$$= \int_1^2 x + \ln\left(\frac{x+2}{2x}\right) dx \qquad cm^2$$

$$= \int_1^2 x + \ln(x+2) - \ln(2x)\ dx \quad cm^2$$

$$= \int_1^2 x + \ln(x+2) - \ln(2) - \ln(x)\ dx \qquad cm^2$$

$$= \int_1^2 (x - \ln(2))\, dx + \int_1^2 \ln(x+2)\, dx - \int_1^2 \ln(x)\, dx \quad cm^2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(2).x\right]_1^2 + \left(8\ln(2) - 3\ln(3) - 1\right) - \left(2\ln(2) - 1\right)$$

$$= \left(2 - 2\ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} - \ln(2)\right) + 8\ln(2) - 3\ln(3) - 1 - 2\ln(2) + 1$$

$$= 2 - 2\ln(2) - \frac{1}{2} + \ln(2) + 8\ln(2) - 3\ln(3) - 1 - 2\ln(2) + 1$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2} + 5\ln(2) - 3\ln(3) \qquad cm^2$$

9) a

* pour $n=0$ $U_0 > 2$ $(3>2)$ Vraie

* supposons que $U_n > 2$

et montrons que $U_{n+1} > 2$

on a : $\begin{cases} U_n > 2 \\ f \text{ est croissante sur } [2, +\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow$ $f(U_n) > f(2)$

$\Rightarrow$ $U_{n+1} > 2$

conclusion : $U_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

9) b

D'après 5 : si $x > 2$: $f(x) - x < 0$

or $U_n > 2$: $f(U_n) - U_n < 0$

: $U_{n+1} - U_n < 0$

donc (U_n) est décroissante

(U_n) décroissante et minorée par 2 donc (U_n) convergente

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [2,+\infty[\\ f([2,+\infty[) \subset [2,+\infty[\\ (U_n) \text{ convergente} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{La limite de } (U_n) \\ \text{vérifie l'équation} \\ f(x) = x \end{array}$$

et D'après 5 2 est unique solution de l'équation $f(x) = x$

$$\Longrightarrow \lim_{+\infty} U_n = 2$$