Exercice 1

1

$$(S') : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z + 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-2)^2 - 4 + 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$$

(S') sphère de Centre $\Omega(1,0,2)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

2

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

on a $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(1,1,1)$ vecteur normal au plan (OAB)

$(OAB) : 1.x + 1.y + 1.z + d = 0$

or $O \in (OAB) \Rightarrow 1.(0) + 1(0) + 1(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0$

donc $(OAB) : x + y + z = 0$

3) a

on a : $\begin{cases} \vec{n}(1,1,1) \text{ vecteur normal au } (OAB) \\ (\Delta) \text{ droite orthogonale au } (OAB) \end{cases}$

donc $\vec{n}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de (Δ)

$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + (1)\,t \\ y = 0 + (1)\,t \\ z = 2 + (1)\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

3) b

soit $t = -1 \Rightarrow (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + (-1) = 0 \\ y = (-1) = -1 \\ z = 2 + (-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow A \in (\Delta)$

3) c

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

on a $d(\Omega,(OAB)) = R$ donc le plan (OAB) est tangent à la sphère (S')

point de la tangent est le projeté orthogonal de Ω sur (OAB) est l'intersection de (Δ) et de plan (OAB) et on a : $\begin{cases} A \in (\Delta) \\ A \in (OAB) \end{cases}$

donc (OAB) est tangent à (S') en A

Exercice 2

1

$$z^2-(4+2\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}=0$$

$$\Delta=\left(-(4+2\sqrt{3})\right)^2-4(1)(8+4\sqrt{3})$$

$$=16+16\sqrt{3}+12-32-16\sqrt{3}=-4$$

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{4+2\sqrt{3}+2i}{2}=2+\sqrt{3}+i$$

$$z_2=\overline{z_1}=2+\sqrt{3}-i \qquad S=\{2+\sqrt{3}+i\ ;\ 2+\sqrt{3}-i\}$$

2) a

$$\sqrt{3}.(a-c)=\sqrt{3}.(2+2i-2-\sqrt{3}-i)$$

$$=\sqrt{3}.(-\sqrt{3}+i)=-3+\sqrt{3}i$$

$$-i.(b-c)=-i.(2-2i-2-\sqrt{3}-i)$$

$$=-i(-\sqrt{3}-3i)=\sqrt{3}i-3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}.(a-c)=-i(b-c)$$

2) b

on a $\sqrt{3}.(a-c) = -i\,(b-c) \Rightarrow \frac{a-c}{b-c} = \frac{-i}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\left(\cos -\frac{\pi}{2} + \sin -\frac{\pi}{2}\, i\right)$

donc $\begin{cases} \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CA = \frac{\sqrt{3}}{3}\, CB \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow$ ABC triangle rectangle en C

2) c

$R(O, \frac{\pi}{2})(B) = A \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OA \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow a - 0 = e^{\frac{\pi}{2} i}\,(b - 0)$

$\Leftrightarrow a = \left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\, i\right).\, b$

$\Leftrightarrow a = i.(2-2i)$

$\Leftrightarrow a = 2i + 2$ Vraie

2) d

* D'après ② ⓑ ABC rectangle en C

donc $C \in (\mathcal{C})$ avec $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre [AB]

* et d'après ② ⓒ $R(O, \frac{\pi}{2})(B) = A \Rightarrow \overline{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow$ OAB rectangle en O

donc $O \in (\mathcal{C})$

conclusion : A, B, C et O appartient au cercle

$(\mathcal{C})$ de diamètre [AB]

de centre Ω milieu de [AB] : $\omega = \frac{a+b}{2} = 2$

et de rayon $R = \frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|2-2i-2-2i|}{2} = 2$

Exercice 3

1

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 4}$$

A "$\lfloor P \mid P \rfloor$" $\quad P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{4^2}{5^2} = \dfrac{16}{25}$

$\bar{B}$ "$\lfloor I \mid I \rfloor$" $\quad P(B) = 1 - P(\bar{B})$

$$= 1 - \frac{4^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Remarque
$\bar{B} = A$

2

$\lfloor P \mid P \rfloor \longrightarrow X = 0$

$\lfloor P \mid I \rfloor \longrightarrow X = 1$

$\lfloor I \mid I \rfloor \longrightarrow X = 2$

$$P(X=0) = P(A) = \frac{16}{25}$$

$$P(X=1) = \frac{4^1 \cdot 1^1 \cdot 2}{5^2} = \frac{8}{25}$$

$$P(X=2) = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$$

Problème

I) 1: a

$$e^{x} = \frac{1}{e^{-x}} \Longrightarrow e^{x-1} = \frac{1}{e^{1-x}}$$

$$\ln(1+e^{x-1}) = \ln\left(1+\frac{1}{e^{1-x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{1-x}+1}{e^{1-x}}\right)$$

$$= \ln(e^{1-x}+1) - \ln(e^{1-x})$$

$$= \ln(e^{1-x}+1) - (1-x)$$

$$= \ln(e^{1-x}+1) - 1 + x$$

I) 1: b

$$\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \qquad (a = 1)$$

$$f(2a-x) = f(2(1)-x)$$

$$= f(2-x)$$

$$= \frac{1}{2}(2-x) + \ln\left(1+e^{1-(2-x)}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \ln\left(1+e^{x-1}\right)$$

d'après a)

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \left(x - 1 + \ln\left(1+e^{1-x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x + \ln\left(1+e^{1-x}\right)$$

$$= f(x)$$

I) 2: a

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1}{2}x + \ln\left(1+e^{1-x}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} e^{1-x} = 0$ et $\ln(1) = 0$

$$\lim_{+\infty} f(x) - y = \lim_{+\infty} \ln\left(1+e^{1-x}\right) = 0$$

donc $(D) : y = \frac{1}{2}x$ asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

I) 2: b

on a $f(x) - \frac{1}{2}x = \ln\left(1+e^{1-x}\right)$

on a : $e^{1-x} > 0 \Rightarrow 1 + e^{1-x} > 1$

$\Rightarrow \ln(1+e^{1-x}) > 0$

$\Rightarrow f(x) - y > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) - y$	$+$
position relative	$(\mathcal{C})$ au dessus de (D)

I) 3: a

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x + \ln(1+e^{1-x})\right)'$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(1+e^{1-x})'}{1+e^{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-e^{1-x}}{1+e^{1-x}}$$

$$= \frac{1+e^{1-x} - 2e^{1-x}}{2(1+e^{1-x})} = \frac{1-e^{1-x}}{2(1+e^{1-x})}$$

I) 3: b

$f'(x)$ est du signe de $1-e^{1-x}$ car $2(1+e^{1-x})>0$

$$1-e^{1-x} \geqslant 0 \iff -e^{1-x} \geqslant -1$$
$$\iff e^{1-x} \leqslant 1$$
$$\iff 1-x \leqslant 0$$
$$\iff x \geqslant 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-e^{1-x}$		$-$	0	$+$	

* si $x \in]-\infty, 1]$: $f'(x) \leqslant 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty, 1]$

* si $x \in [1, +\infty[$: $f'(x) \geqslant 0$

donc f est croissante sur $[1, +\infty[$

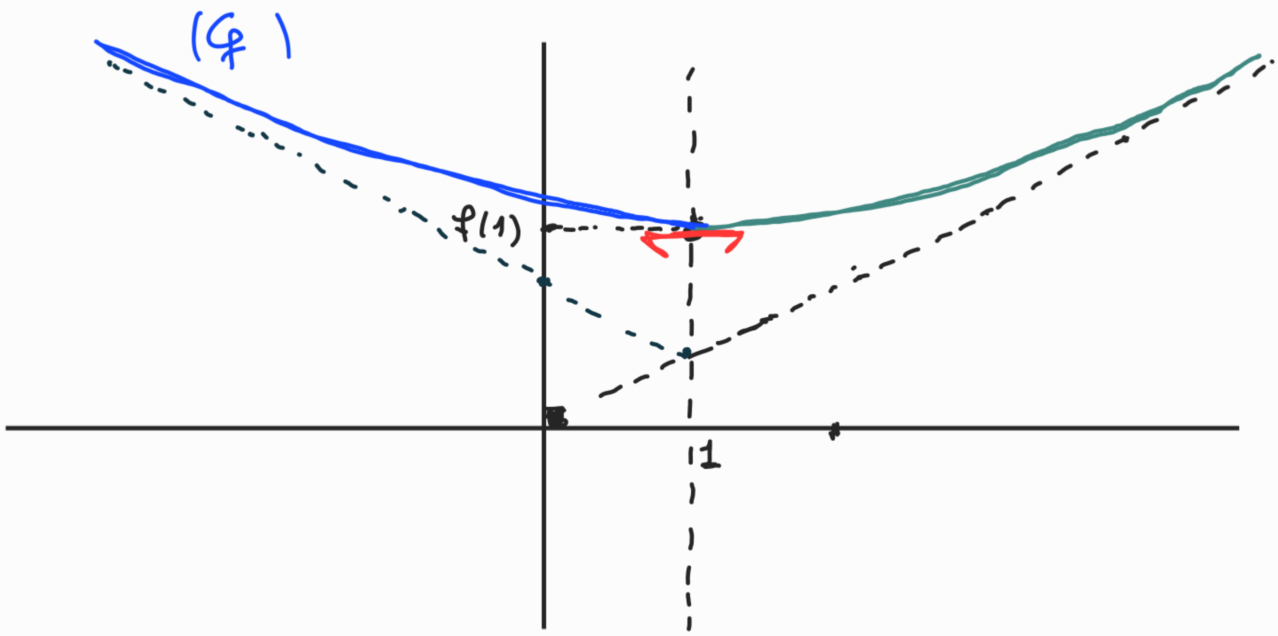
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \frac{1}{2} + \ln(2)$

I) 3: c

$f'(1) = 0 \implies (\mathcal{C}_f)$ admet au point $(1, f(1))$ une tangente Horizontale.

I) 4



II) 1: a

$h(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2} + \ln(2) - 1 = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$

on a h continue et monotone (strictement décroissante) sur $]1, +\infty[$ avec $\begin{cases} h(]1,+\infty[) =]-\infty, h(1)[\\ 0 \in]-\infty, h(1)[\end{cases}$

D'après TVI l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$

or $\begin{cases} h(1)=\ln(2)-\frac{1}{2} > 0 \\ h(2)=1+\ln(1+e^{-1}) < 0 \\ h(1).h(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1<\alpha<2$

<u>conclusion</u>

l'équation $h(x)=0$ $(f(x)=x)$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$ et $1<\alpha<2$

II) 1: b

$\begin{cases} 1\leq x\leq \alpha \\ h \text{ est décroissante sur } [1,+\infty[\end{cases} \Rightarrow h(x)\geq h(\alpha)$

$\Rightarrow h(x)\geq 0$

$\Rightarrow f(x)-x\geq 0$

II) 2: a

* pour $n=0$: $1\leq U_0<\alpha$ vraie $(1\leq 1<\alpha)$
* supposons que $1\leq U_n<\alpha$

et montrons que $1\leq U_{n+1}<\alpha$

on a : $\begin{cases} 1 \leq U_n < \alpha \\ f \text{ est croissante sur } [1, \alpha] \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f(1) \leq f(U_n) < f(\alpha)$

$1 \leq \frac{1}{2} + \ln(2) \leq U_{n+1} < \alpha$

conclusion : $1 \leq U_n < \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

II) 2: b

D'après (II) si $1 \leq x < \alpha$: $f(x) - x \geq 0$

or $1 \leq U_n < \alpha$: $f(U_n) - U_n \geq 0$

: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

donc (U_n) est croissante

II) 2: c

on a (U_n) croissante et majorée par α donc

(U_n) est convergente

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [1, \alpha[\\ f([1,\alpha[) \subset [1, \alpha[\\ (U_n) \text{ convergente} \end{cases} \Rightarrow$ la limite de (U_n) vérifie l'équation $f(x) = x$

D'après (II)(1) α est unique solution $\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = \alpha$

III) 3: a

* D'après le tableau de variations de f

f admet une valeur minimale égale $\frac{1}{2}+\ln(2)$ en 1

donc $\boxed{\frac{1}{2}+\ln(2) \leq f(x) \quad \forall x \geq 1}$ (*1)

*

on a $x \geq 1$: $-x \leq -1$

: $1-x \leq 0$

: $e^{1-x} \leq 1$

: $1+e^{1-x} \leq 2$

: $\ln(1+e^{1-x}) \leq \ln(2)$

: $\frac{1}{2}x + \ln(1+e^{1-x}) \leq \frac{1}{2}x + \ln(2)$

$\boxed{f(x) \leq \frac{1}{2}x + \ln(2) \quad \forall x \geq 1}$ (*2)

D'après (*1) et (*2) :

$$\boxed{\frac{1}{2}+\ln(2) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x+\ln(2) \quad \forall x \geq 1}$$

III) 3: b

on a : $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\, dx \qquad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\, dx$$ car $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,2]$

D'après (b) : $\frac{1}{2} + \ln(2) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \ln(2) \quad \forall x \geq 1$

$$: \int_1^2 \frac{1}{2} + \ln(2)\, dx \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \int_1^2 \frac{1}{2}x + \ln(2)\, dx$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} + \ln(2)\right) \cdot x\right]_1^2 \leq \mathcal{A} \leq \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \ln(2) \cdot x\right]_1^2$$

$$\frac{1}{2} + \ln(2) \leq \mathcal{A} \leq (1 + 2\ln(2)) - \left(\frac{1}{4} + \ln(2)\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} + \ln(2) \leq \mathcal{A} \leq \frac{3}{4} + \ln(2)}$$