Exercice 1

1

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

on a $\vec{AB} \wedge \vec{AC}\,(-1, 1, -1)$ vecteur normal au (ABC)

$(ABC) : (-1)x + (1)(y) + (-1)(z) + d = 0$

or $B(1,0,0) \in (ABC) \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$

donc $(ABC) : -x + y - z + 1 = 0$

$: -(x - y + z - 1) = 0$

$: x - y + z - 1 = 0$

2) a

(S') : $x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$

$x^2-4x+y^2-4y+z^2-8z+20=0$

$(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+(z-4)^2-16+20=0$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$

(S') sphère de centre $\Omega(2,2,4)$ et $R=\sqrt{4}=2$

2) b

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|(2)-(2)+(4)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

on a $d(\Omega,(ABC))<R$ donc le plan (ABC) coupe la sphère (S') selon un cercle $(\mathcal{C})$.

soit H centre de $(\mathcal{C})$

H est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC)

donc H est l'intersection de (Δ) et de (ABC)

avec (Δ) est la droite passant par Ω et orthogonale au plan (ABC)

$$(ABC) \cap (\Delta) = \{H\}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2+t) - (2-t) + (4+t) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + t - 2 + t + 4 + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(1, 3, 3)$$

Exercice 2

1

$a = 3+\sqrt{3}i \Rightarrow |a| = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right)$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}i\right)}$

$a^{2022} = \left(2\sqrt{3}.\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}i\right)\right)^{2022}$

$= (2\sqrt{3})^{2022}\cdot\left(\cos\left(\frac{2022\pi}{6}\right) + \sin\frac{2022\pi}{6}i\right)$

$337\pi \equiv \pi\,[2\pi]$

$= (2\sqrt{3})^{2022}\cdot\left(\cos(337\pi) + \sin(337\pi)i\right)$

$= (2\sqrt{3})^{2022}\left(\cos\pi + \sin\pi\, i\right)$

$= (2\sqrt{3})^{2022}\left(-1+0i\right) = -(2\sqrt{3})^{2022}$

$$\frac{c-w}{a-w} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 3}{3+\sqrt{3}i - 3} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = \frac{(3-\sqrt{3}i)(i)}{(2\sqrt{3}i)(i)}$$

$$= \frac{3i+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ona: $\left|\frac{c-w}{a-w}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$$\frac{c-w}{a-w} = 1.\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

Remarque

$-\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\boxed{\frac{c-w}{a-w} = 1.\left(\cos -\frac{2\pi}{3} + \sin -\frac{2\pi}{3}\, i\right)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-w}{a-w}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-w}{a-w}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega C = \Omega A \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [\pi] \end{cases}$$

3) a

$$R\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff z' - w = e^{\frac{\pi}{3}i}(z - w)$$

$$\iff z' - 3 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} i\right)(z - 3)$$

$$\iff z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(z - 3) + 3$$

$$\iff z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z - \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i + 3$$

$$\iff z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

3) b

$$R(A) = D \iff d = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(a) + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$\iff d = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(3 + \sqrt{3} i) + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$\iff d = \cancel{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2} i} - \cancel{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2} i}$$

$$\iff d = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Vraie

$R(B) = C \iff c = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(3 - \sqrt{3}i\right) + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$\iff c = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \cancel{\frac{3}{2}\sqrt{3}i} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$

$\iff c = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ Vraie

4

on a : $R(\Omega, \frac{\pi}{3})(A) = D \Longrightarrow \boxed{\Omega A = \Omega D}$ $(*_1)$

$R(\Omega, \frac{\pi}{3})(B) = C \Longrightarrow \boxed{\Omega B = \Omega C}$ $(*_2)$

et d'après (2) on a: $\boxed{\Omega C = \Omega A}$ $(*_2)$

$(*_1)$; $(*_2)$ et $(*_3)$ $\Rightarrow \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

donc A, B, C et D appartiennent au même cercle

$(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $R = \Omega A$

$R = \Omega A = |a - w| = |3 + \sqrt{3}i - 3| = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$

Exercice 3

$$\underbrace{\{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4\}}$$

$\underline{|\,P\,|\,P\,|}$ $$p(A) = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$\underline{|\,2\,|\,?\,|}$ $$p(B) = \frac{2^1 \times 5^1}{5^2} = \frac{2}{5}$$

$\underline{|\,2\,|\,P\,|}$ $$p(A \cap B) = \frac{2^1 \cdot 3^1}{5^2} = \frac{6}{25}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{9}{25} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25}$$

$$= \frac{13}{25}$$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$= \frac{6/25}{9/25} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Problème

1

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}} = \text{"} \frac{-\infty}{0^+} \text{"} = -\infty$$

car $\lim_{0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{0^+} \sqrt{x} = 0^+$

$\lim_{0^+} f(x) = -\infty$

$\hookrightarrow$ la droite d'equation $x=0$ asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$

2) a

on a : $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{+\infty} \frac{\ln((\sqrt{x})^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{+\infty} 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$

2) b

on a $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

la droite d'equation $y=0$ asymptote Horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

3

$$f(x) = 0 \iff \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\iff 1+\ln(x) = 0$$

$$\iff \ln(x) = -1$$

$$\iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

4) a

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \frac{(1+\ln(x))'\sqrt{x} - (1+\ln(x))(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right).(\sqrt{x}) - (1+\ln(x))\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1+\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1+\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2-1-\ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{1-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$$

4) b

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$ car $2x\sqrt{x} > 0$

$1-\ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1$

$\iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

* si $x \in]0,e]$: $f'(x) \geqslant 0$

donc f est croissante sur $]0,e]$

* si $x \in [e,+\infty[$: $f'(x) \leqslant 0$

donc f est décroissante

4) c

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$	0

$$f(e) = \frac{1+\ln(e)}{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{e}}$$

5

$$(T): \quad y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot(x-1) + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

6) a

$$f''(x) = \left(\frac{1-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \frac{(1-\ln(x))'(2x\sqrt{x}) - (1-\ln(x))(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(-1/x)(2x\sqrt{x}) - (1-\ln(x))\left((2x)'\sqrt{x} + (2x)(\sqrt{x})'\right)}{4x^3}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x} - (1-\ln(x))\left(2\sqrt{x} + 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^3}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x} - (1-\ln(x))(2\sqrt{x} + \sqrt{x})}{4x^3}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x} - (1-\ln(x))(3\sqrt{x})}{4x^3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\,(-2-3+3\ln(x))}{4x^3}$$

$$= \frac{-5+3\ln(x)}{4x^2\sqrt{x}} \qquad \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

6) b

$$f''(x) = \frac{3\ln(x)-5}{4x^2\sqrt{x}}$$

$f''(x)$ est du signe de $3\ln(x)-5$ car $4x^2\sqrt{x} > 0$

$$3\ln(x)-5 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 5/3$$

$$\iff x \geqslant e^{5/3}$$

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
φ	$\|\|$				

f'' s'annule et change de signe en e

dans $I(e, f(e))$ est un point d'inflexion pour (φ)

7) a

on a $h([\alpha,1]) = h([\alpha,\beta]) \cup h([\beta.1])$

$= [0, h(\beta)]$

$\forall x \in [\alpha.1] : h(x) \in [0, h(\beta)]$

$: h(x) \geqslant 0$

$: f(x) - x \geqslant 0$

$: f(x) \geqslant x$

7) b

on a $h(1) = 0$

si $\begin{cases} \beta \leqslant x < 1 \\ h \text{ décroisante sur } [\beta.1[\end{cases} \Rightarrow h(x) > h(1)$

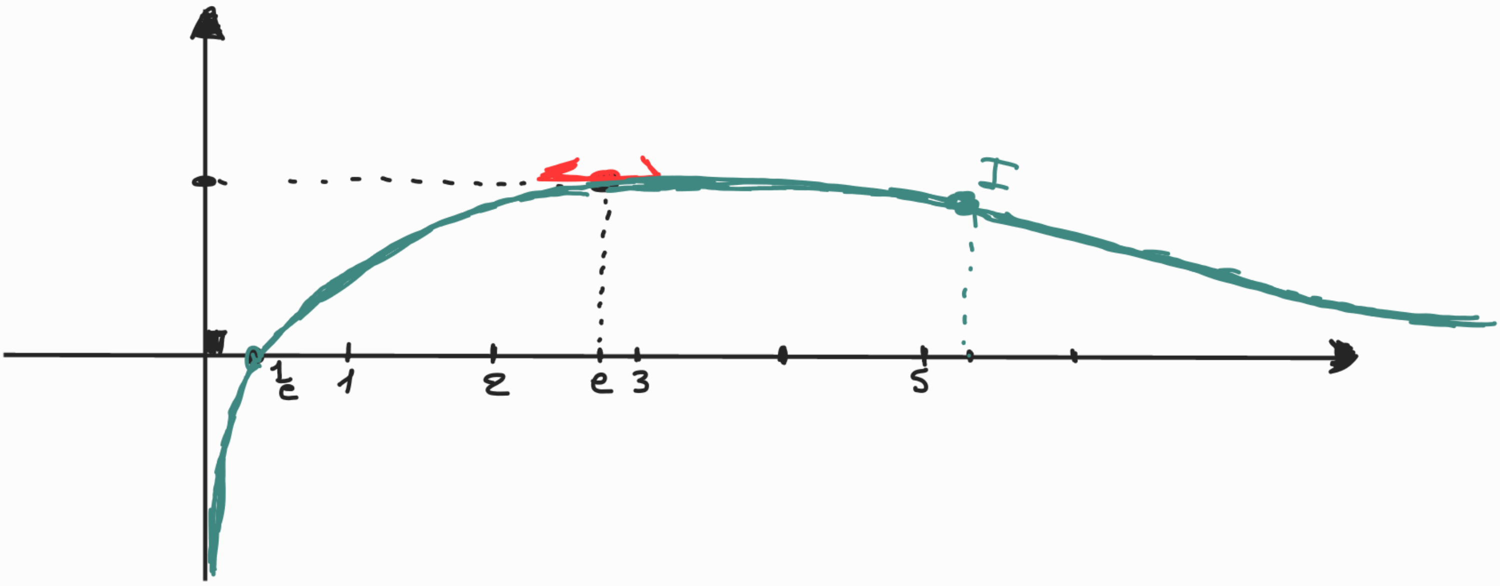
$\Rightarrow h(x) > 0$

$\Rightarrow h(x) \neq 0$ sur $[\beta.1[$

conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution 1 sur $[\beta.1]$

donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[\beta.1]$

8



II) a

$$\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u(x) = \ln(x) \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow v(x) = 2\sqrt{x}$$

$$\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\cdot\ln(x)\Big]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}\,dx$$

$\ln(4) = 2\ln(2)$

$$= \big(4\ln(4)\big) - (0) - \int_1^4 2\frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$= 8\ln(2) - \int_1^4 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 8\ln(2) - \Big[4\sqrt{x}\Big]_1^4$$

$$= 8\ln(2) - 4$$

II) b

$$\mathcal{A} = \int_1^4 |f(x)|\, dx \qquad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= \int_1^4 f(x)\, dx \qquad cm^2$$

$$= \int_1^4 \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 + \left(8\ln(2) - 4\right)$$

$$\mathcal{A} = 2 + 8\ln(2) - 4$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 8\ln(2) - 2 \quad cm^2}$$

III) a

* pour $n = 0$ $\quad \alpha < u_0 < 1$ Vraie

$$\left(0{,}56 < \frac{3}{4} < 1\right)$$

* supposons que $\alpha < u_n < 1$

et montrons que $\alpha < u_{n+1} < 1$

on a $\begin{cases} \alpha < U_n < 1 \\ f \text{ est croissante sur } [\alpha, 1] \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) < f(U_n) < f(1)$

$\Rightarrow \alpha < U_{n+1} < 1$

car $\begin{cases} h(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha \\ h(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1 \end{cases}$

conclusion : $\alpha < U_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

III) b

d'après (I) (7) si $\alpha < x < 1$: $f(x) - x > 0$

or $\alpha < U_n < 1$: $f(U_n) - U_n > 0$

: $U_{n+1} - U_n > 0$

$\Rightarrow$ (U_n) est décroissante

(U_n) décroissante et majorée par 1 donc (U_n) est convergente

III) c

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [\alpha, 1] \\ f([\alpha, 1]) \subset [\alpha, 1] \\ (U_n) \text{ convergente} \end{cases} \Rightarrow$ la limite de (U_n) vérifie l'équation $f(x) = x$

et d'après (I) (7) $x = 1$ ou $x = \alpha$.

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = 1$$