Exercice 1

1

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

on a $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-6, -6, -3)$ vecteur normal au (ABC)

(ABC) : $-6x - 6y - 3z + d = 0$

$B(3, 1, 1) \in (ABC) \Rightarrow -6(3) - 6(1) - 3(1) + d = 0$

$$\Rightarrow d = 27$$

donc (ABC) : $-6x - 6y - 3z + 27 = 0$

$: -3 \cdot (2x + 2y + z - 9) = 0$

$$\boxed{(ABC) : \quad 2x + 2y + z - 9 = 0}$$

2) a

on a $\begin{cases} \vec{n}(2,2,1) \text{ vecteur normal au } (ABC) \\ (\Delta) \text{ droite orthogonale au plan } (ABC) \end{cases}$

donc $\vec{n}(2,2,1)$ est un vecteur directeur de (Δ)

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 + 1 \cdot t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2) b

le projeté orthogonal de Ω sur (ABC) est l'intersection de (Δ) et de (ABC)

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ 2x + 2y + z - 9 = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2(1+2t) + 2(-1+2t) + (t) - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow 2 + 4t - 2 + 4t + t - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow 9t = 9 \Longrightarrow t = 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 3 = x_B \\ y = 1 = y_B \\ z = 1 = z_B \end{cases}$$

donc : B est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC)

on a $\quad r = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow R^2 = r^2 + d^2$

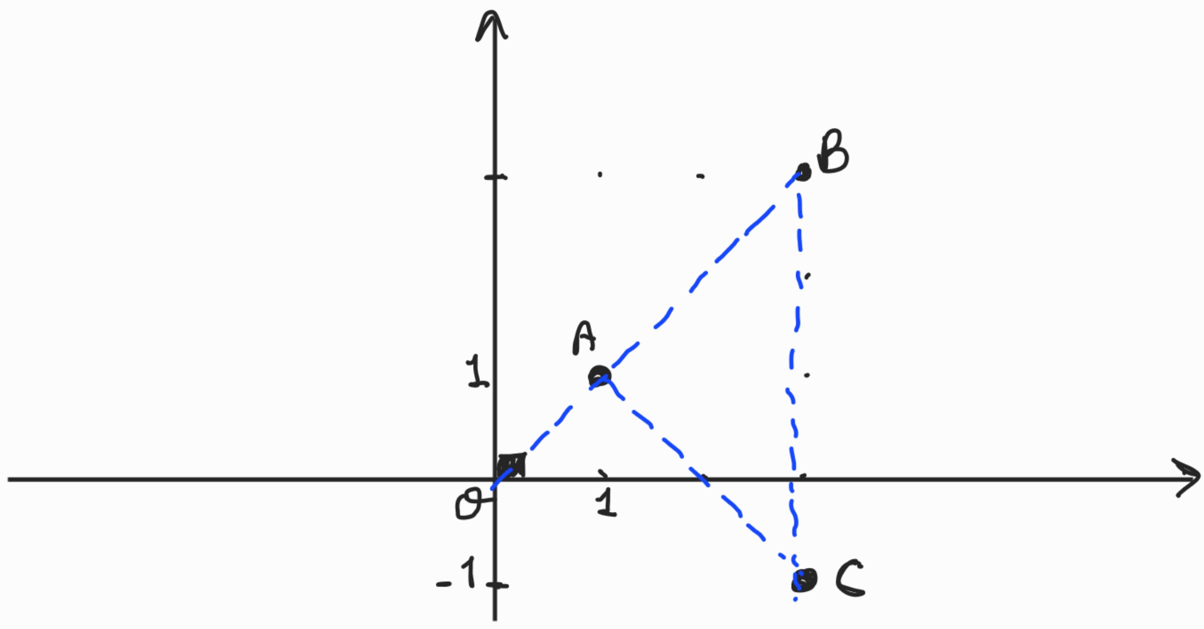
$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{r^2 + d^2}}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2(1) + 2(-1) + (0) - 9|}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{27} \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{(\sqrt{27})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Exercice 2

1



2) a

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-i-1-i}{3+3i-1-i} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-i-1}{(1)^2-(i)^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

2) b

on a $\frac{c-a}{b-a} = -i = 1 \cdot \left(\cos\frac{-\pi}{2} + \sin\frac{-\pi}{2}\, i\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]} \end{cases}$$

donc C est l'image de B par la rotation R de

centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

3) a

(T) : $z' = 2z - i - 1$

$T(A) = A \iff a = 2a - i - 1$

$\iff -a = -i - 1$

$\iff a = 1 + i$ Vraie

3) b

on a : $\begin{cases} T(M) = M' \\ T(A) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = 2z - i - 1 \\ a = 2a - i - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow z' - a = (2z - i - 1) - (2a - i - 1)$

$\Rightarrow z' - a = 2z - i - 1 - 2a + i + 1$

$\Rightarrow z' - a = 2.(z - a)$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM'} = 2.\overrightarrow{AM}}$

(T) est l'homothétie de centre A et de rapport 2

4

$|i\bar{m} - 1 - i| = 3 \Rightarrow |\overline{i\bar{m} - 1 - i}| = 3$

$\Rightarrow |-im - 1 + i| = 3$

$\Rightarrow \left|-i\left(m - \frac{1}{-i} + \frac{i}{-i}\right)\right| = 3$

$\Rightarrow |-i| . |m - i - 1| = 3$

$\Rightarrow |m - a| = 3$

$\Rightarrow AN = 3$

$|z| = |\bar{z}|$

$\bar{\bar{m}} = m$

$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

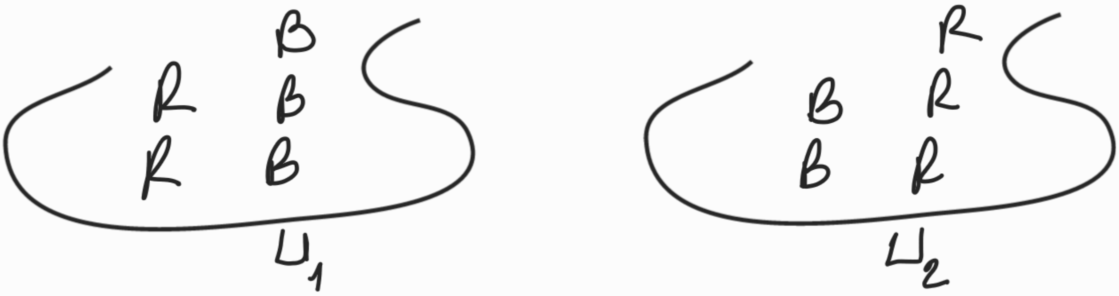
$\frac{1}{i} = -i$

$|-i| = 1$

l'ensemble des points est le cercle de centre A et de rayon 3

Exercice 3

1



$$P(B) = \overset{R}{\frac{C_2^1}{C_5^1}} \cdot \frac{C_5^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \overset{R}{\frac{C_2^1}{C_5^1}} \cdot \overset{R}{\frac{C_3^1}{C_5^1}} + \overset{B}{\frac{C_3^1}{C_5^1}} \cdot \overset{B}{\frac{C_2^1}{C_5^1}}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$$P(A \cap B) = \overset{R}{\frac{C_2^1}{C_5}} \cdot \overset{R}{\frac{C_3^1}{C_5^1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$$

Problème

1) a

$$\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1} = \frac{\frac{1}{e^{-x+1}}-1}{\frac{1}{e^{-x+1}}+1} \qquad e^{x} = \frac{1}{e^{-x}}$$

$$= \frac{\frac{1-e^{-x+1}}{e^{-x+1}}}{\frac{1+e^{-x+1}}{e^{-x+1}}}$$

$$= \frac{1-e^{-x+1}}{1+e^{-x+1}} = -\frac{e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1}$$

1) b

$\forall x \in D_f \qquad 2a - x \in D_f \qquad a = 1$

$$f(2a-x) = f(2-x)$$

$$= (2-x) + \frac{2e^{-(2-x)+1}-2}{e^{-(2-x)+1}+1}$$

$$= 2-x + \frac{2e^{x-1}-2}{e^{x-1}+1}$$

$$= 2-x + 2\left(\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}\right)$$

$$= 2 - x + 2\left(-\frac{e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1}\right)$$

$$= 2 - x - \frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1}$$

$$= 2 - \left(x + \frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1}\right)$$

$$= 2(1) - f(x)$$

$$= 2b - f(x)$$

2

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \overset{\to +\infty}{x} + \frac{2\overset{\to 0}{e^{-x+1}}-2}{\underset{0 \leftarrow}{e^{-x+1}}+1} = +\infty$$

car $\lim\limits_{+\infty} e^{-x+1} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1} = -2$

$$\lim_{+\infty} f(x) - y = \lim_{+\infty} x + \frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1} - x + 2$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{2e^{-x+1}-2+2e^{-x+1}+2}{e^{-x+1}+1}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{4e^{-x+1}}{e^{-x+1}+1} = \frac{0}{1} = 0$$

on a $f(x) - y = f(x) - x = \dfrac{2(e^{-x+1} - 1)}{e^{-x+1} + 1}$

$f(x) - y$ est du signe de $e^{-x+1} - 1$ car

$2 > 0$ et $e^{-x+1} + 1 > 0$

$e^{-x+1} - 1 \geq 0 \iff e^{-x+1} \geq 1 \iff -x+1 \geq 0$

$\iff -x \geq -1 \iff x \leq 1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$e^{-x+1} - 1$	+ 0 −

* si $x \in]-\infty, 1]$: $f(x) - y \geq 0$

donc $(\mathcal{C}_f)$ au dessus de (D) sur $]-\infty, 1]$

* si $x \in [1, +\infty[$: $f(x) - y \leq 0$

donc $(\mathcal{C}_f)$ au dessous de (D) sur $[1, +\infty[$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x) - y$	+ 0 −
position relative	$(\mathcal{C}_f)$ au dessus de (D) $(\mathcal{C}_f)$ au dessous de (D)

4) a

$$f'(x) = \left(x + \frac{2e^{-x+1} - 2}{e^{-x+1} + 1}\right)'$$

$$= 1 + \frac{(2e^{-x+1} - 2)' \cdot (e^{-x+1} + 1) - (2e^{-x+1} - 2)(e^{-x+1} + 1)'}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= 1 + \frac{-2e^{-x+1} \cdot (e^{-x+1} + 1) - (2e^{-x+1} - 2)(-e^{-x+1})}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= 1 + \frac{2e^{-x+1} \cdot (-e^{-x+1} - 1 + e^{-x+1} - 1)}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= 1 + \frac{-4e^{-x+1}}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^{-x+1} + 1)^2 - 4 \cdot e^{-x+1}}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^{-x+1})^2 + 2(e^{-x+1}) + 1 - 4e^{-x+1}}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^{-x+1})^2 - 2(e^{-x+1}) + 1}{(e^{-x+1} + 1)^2} = \frac{(e^{-x+1} - 1)^2}{(e^{-x+1} + 1)^2}$$

4) b

$f'(1) = 0 \Rightarrow (\mathscr{C})$ admet au point $(1,1)$ une tangente Horizontale

4) c

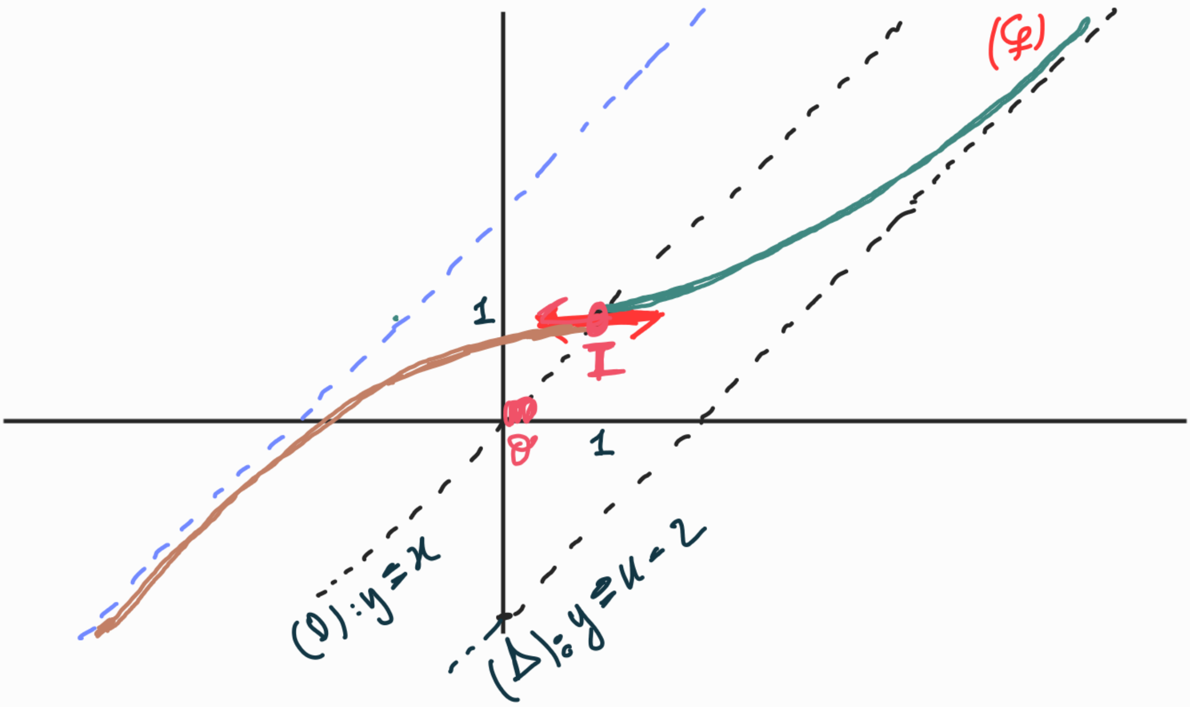
$$f'(x) = \frac{(e^{-x+1}-1)^2}{(e^{-x+1}+1)^2}$$

on a $\begin{cases} (e^{-x+1}-1)^2 \geq 0 \\ e^{-x+1}+1 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

5



6) a

$$x+2-\frac{4}{e^{-x+1}+1} = x+\frac{2e^{-x+1}+2-4}{e^{-x+1}+1}$$

$$= x+\frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1} = f(x)$$

6) b

$$(x+1)\underbrace{(e^{-x+1}+1)}_{+} > 4 \iff x+1 > \frac{4}{e^{-x+1}+1}$$

$$\iff \frac{-4}{e^{-x+1}+1} > -x-1$$

$$\iff x+2-\frac{4}{e^{-x+1}+1} > x+2-x-1$$

$$\iff f(x) > 1$$

D'après la figure : $S =]1,+\infty[$

7) a

$$\frac{2e^{-x+1}}{e^{-x+1}+1}-1 = \frac{2e^{-x+1}-e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1}$$

$$= \frac{e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1}$$

7) b

$$\int_0^1 \frac{e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2e^{-x+1}}{e^{-x+1}+1} - 1 \, dx$$

$$= \left[-2.\ln|e^{-x+1}+1| - x\right]_0^1$$

$$= \left(-2\ln(2)-1\right) - \left(-2\ln(e+1)\right)$$

$$= -2\ln(2) - 1 + 2\ln(e+1)$$

7) c

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \Big| \underbrace{f(x) - y}_{\oplus} \Big| \, dx \qquad \|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

$$= \int_0^1 f(x) - y \quad dx \qquad cm^2$$

$$= \int_0^1 \frac{2e^{-x+1}-2}{e^{-x+1}+1} \, dx$$

$$= 2. \int_0^1 \frac{e^{-x+1}-1}{e^{-x+1}+1} \, dx$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 4\ln(e+1) - 4\ln(2) - 2 \quad cm^2}$$

8) a

* pour $n = 0$ $\quad 0 < U_0 < 1$ Vraie

* supposons que $\quad 0 < U_n < 1$

et montrons que $\quad 0 < U_{n+1} < 1$

on a : $\begin{cases} 0 < U_n < 1 \\ f \text{ est croissante sur } [0.1] \end{cases} \Rightarrow f(0) < f(U_n) < f(1)$

$\Rightarrow 0 < f(0) < U_{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$

conclusion : $0 < U_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

8) b

d'après (3) si $0 < x < 1$: $f(x) - x > 0$

si $\quad 0 < U_n < 1$: $f(U_n) - U_n > 0$

: $U_{n+1} - U_n > 0$

donc (U_n) est croissante

8) c

on a (U_n) croissante et majorée par 1

donc (U_n) est convergente.

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0.1] \\ f([0.1]) \subset [0,1] \\ (U_n) \text{ convergente} \end{array}\right. \Longrightarrow$$ la limite de (U_n) vérifie l'équation $f(x) = x$

et d'après (3) 1 est solution unique de l'équation $f(x) = x$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} U_n = 1}$$